中国科学技术大学物理学院

2021～2022 学年第二学期期末试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称：恒星物理基础　　课程代码：022171.01

开课院系：物理学院　　考试形式：闭卷

姓　名：________　　学　号：________

题 号	一	二	三	四	五	总 分
得 分						

（装订线内不要答题）

一、（20 分）对于主序恒星内部的化学组分非均匀的区域，物态方程应写为$\rho=\rho(P,T,\mu)$，其中 μ 为平均分子量，P 为总压强，T 为温度，ρ 为气体的质量密度。1）若气体压强占总压强的比重为β，请导出$d\ln\rho$的表达式？2）若辐射压可以忽略，请导出$d\ln\rho$的具体表达式？3）忽略电离能，请写出单位质量气体的总的比内能的表达式？摩尔气体常量为$\mathcal{R}$，黑体辐射常量为 a.

二、（20 分）通过星际分子云的引力收缩，形成了一颗球状等温的原恒星。原恒星的质量为 M，半径为 R，温度为 T，表面的压强不为零，大小为P_f．原恒星的平均分子量为μ，内部质量分布为m(r). 万有引力常量为 G，摩尔气体常量为$\mathcal{R}$. 设原恒星系统满足位力定理。请导出表面压强P_f的表达式？

三、（20 分）设白矮星的质量为 M, 半径为 R，处于流体静力平衡状态。1）若内部的物态是非相对论性简并电子气，请利用流体静力平衡方程，尝试导出白矮星的质量和半径之间满足的关系？2）若内部的物态是极端相对论性简并电子气，请利用流体静力平衡方程，证明此时白矮星的质量是和半径无关的常数。3）白矮星表面热辐射的等效黑体温度为T_{eff} ，热辐射光度为 L. 请导出 L 和等效温度T_{eff}、质量 M 之间的关系？

四、（20 分）设恒星的质量为 M, 半径为 R，万有引力常量为 G. 1)若扰动的形式是向外的压力远小于自引力，请导出自由落体时标的表达式？2）某脉动变星内部的流体元受到扰动后在平衡位置附近进行径向脉动。脉动周期为 T, 气体平均密度为$\bar{\rho}$, 请导出这两个物理量之间满足的近似关系？

五、（20 分）请从恒星的结构演化方程组出发，导出爱丁顿光度的表达式？

1) $P_{gas} = \beta P$ $\quad d\ln\rho = ?$

答案和评分标准仅供参考。

① 物态方程：$\rho = \rho(T, P, \mu)$

物态方程：

$$P = \frac{R}{\mu}\rho T + \frac{1}{3}aT^4$$

4'

$$\therefore \rho = \frac{\mu}{R}\frac{1}{T}\left(P - \frac{1}{3}aT^4\right)$$

题目已给出 $\rho = \rho(P, T, \mu)$ 需写成 $d\ln\rho = A\,d\ln P + B\,d\ln T + C\ln\mu$ 形式

$$= \frac{\mu}{R}\frac{1}{T}\beta P$$

$$\therefore \ln\rho = \ln\mu + \ln\beta + \ln P - \ln T - \ln R$$

$$\therefore d\ln\rho = d(\ln\mu) + d(\ln\beta) + d(\ln P) - d(\ln T)$$

$$\frac{\partial\ln\beta}{\partial\ln P} = -\frac{P}{\beta}\frac{\partial(1-\beta)}{\partial P} = \frac{1-\beta}{\beta}$$

$\therefore$

$$d\ln\rho = \left[1 + \left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial\ln P}\right)_T\right] d\ln P$$

4'

$$- \left[1 - \left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial\ln T}\right)_P\right] d\ln T + d\ln\mu$$

$$\frac{\partial\ln\beta}{\partial\ln T} = -\frac{T}{\beta}\frac{\partial(1-\beta)}{\partial T} = \frac{4(\beta-1)}{\beta}$$

$$= \frac{1}{\beta}d\ln P - \frac{4-3\beta}{\beta}d\ln T + d\ln\mu$$

4'

② 若 $\beta = 0$

$$d\ln\rho = d\ln p - d\ln T + d\ln\mu$$

perfect gas.

4'

③ $u = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu}T + \frac{1}{\rho}aT^4$

4'

$$= \frac{RT}{\mu}\left[\frac{3}{2} + \frac{3(1-\beta)}{\beta}\right]$$

since $\frac{aT^4}{\rho} = \frac{3P_R}{\rho} = \frac{3(1-\beta)P}{\rho} = \frac{3(1-\beta)}{\beta}\frac{RT}{\mu}$

2). $\frac{\partial P}{\partial m(r)} = -\frac{G\,m(r)}{4\pi r^4}$

等同维里定律的推导过程，
只是由界条件不为0

$$\int_0^M 4\pi r^3 \frac{dP}{dm}\,dm = \left[4\pi r^3 P\right]_0^M - \int_0^M 12\pi r^2 \frac{dr}{dm} P\,dm$$

5'

即: $\int_0^M -\frac{Gm}{r}\,dm = [4\pi r^3 P]_0^M - \int_0^M 12\pi r^2 \frac{dr}{dm} P\,dm$

5'

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

$$\int_0^M \overset{3}{\cancel{12\pi}}\, \cancel{r^2} \frac{1}{\cancel{4\pi}\, \cancel{r^2}\, \rho} P\,dm = \int_0^M \frac{3P}{\rho}\,dm$$

$$\therefore [4\pi r^3 P]_0^M - \int_0^M \frac{3P}{\rho}\,dm = -\int_0^M \frac{Gm}{r}\,dm$$

$$\Rightarrow 4\pi R^3 P_f - \int_0^M \frac{3P}{\rho}\,dm = -\int_0^M \frac{Gm}{r}\,dm$$

等温，理想气体

5'

$$P = \frac{R}{\mu}\rho T$$

$$\therefore \frac{3P}{\rho} = \frac{3RT}{\mu}.$$

$$\therefore 4\pi R^3 P_f - \int_0^M \frac{3RT}{\mu}\,dm$$

5'

$$= 4\pi R^3 P_f - 3\frac{MR}{\mu}T = -\int_0^M \frac{Gm}{r}\,dm$$

3) $\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2}$ 2'

① 非相对论简并时: $P \propto \rho^{5/3} \simeq \frac{M^{5/3}}{R^5}$ 3

$\frac{dP}{dr} \simeq \frac{M^{5/3}}{R^6}$ 2

② 相对论完全简并: $P \propto \rho^{4/3} \simeq \frac{M^{4/3}}{R^4}$ 3

$\frac{dP}{dr} \simeq \frac{M^{4/3}}{R^5}$ 2

题目要求从平衡方程出发.

$\rho \frac{Gm}{r^2} \simeq \frac{M^2}{R^5}$

① $\therefore M^{\frac{1}{3}} R = \text{const}$

② $M = \text{const}$ 2

(放宽标准……)

或解 $n=\frac{3}{2}$ 与 $n=3$ 时的 Lane-Emden 方程

需要看到这两个关系式.

$(\xi_n / R)^2 = \frac{4\pi G}{K(1+n)} \rho_c^{(n-1)/n}$

$M = 4\pi R^3 \rho_c \left[-\frac{1}{\xi}\frac{du}{d\xi}\right]_{\xi_n}$

③.

$M \sim R^{-3}$ $L = T_{eff}^{4} R^2$ 2

$\therefore \lg \frac{L}{L_\odot} = 4 \lg \frac{T_{eff}}{T_\odot} - \frac{2}{3} \lg \left(\frac{M}{M_\odot}\right) + C$

4

4). ① 运动方程:

至少有根据方程.

查看写 $t \propto R^{\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}}$ 或 $t = \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$ 不给分

$$\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}$$ 4

对表面附近列方程:

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dR}$$ 4

若: $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dR} \ll \frac{GM}{R^2}$ 设R不变

$-\ddot{R} = \frac{GM}{R^2}$ $\quad R = \frac{1}{2}\ddot{R}t_{ff}^2$ 4

自由落体时间

$$t_{free} = \left(\frac{2R^3}{GM}\right)^{\frac{1}{2}}$$ 4

② 若用波动方程需列出方程具体形式.

② : $T \cdot \sqrt{\rho} = const$ ⇐ 有 $t_{free} \approx \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$, A明可

4 亦能以衡...估算解

亦可使用开普勒第三定律得到精确解

解: $\sqrt{\frac{1}{8}}\frac{\pi}{\sqrt{GM/R^3}}$

5).

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dr} = -\rho \dfrac{Gm}{r^2} \\[2ex] \dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{3}{4ac} \cdot \dfrac{\kappa\rho}{T^3} \dfrac{F}{4\pi r^2} \end{cases}$$

3'

3'

$$P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4$$ 2'

$$\Rightarrow \frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\kappa\rho}{c} \frac{F}{4\pi r^2}$$ 8'

$$\frac{dP_{rad}}{dP} = \frac{\kappa F}{4\pi c G m}$$ 5'

when $P_{rad} \rightarrow P$

$\Rightarrow F$ 2'