中 国 科 学 技 术 大 学

2014 年秋季学期考试试卷

考试科目: 量子力学　　　　得分: ________

学生所在系: ________　姓名: ________　学号: ________

2015 年 1 月 22 日

注意: 本次考试为开卷考试.

试卷共六题, 任选其中五题, 每题均为 20 分.

问题 1 一维运动的 Hamilton 量为 $H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$. 将 H 的本征态记作 $|\varphi_n\rangle$, 即 $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$.

(a) 证明如下关系:

$$\langle\varphi_n|P|\varphi_{n'}\rangle = \alpha\langle\varphi_n|X|\varphi_{n'}\rangle,$$

其中 α 是某个依赖于能级差 $E_{n'} - E_n$ 的数. 求出 α.

(b) 进一步证明如下结果:

$$\sum_{n'}(E_n - E_{n'})^2\big|\langle\varphi_n|X|\varphi_{n'}\rangle\big|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2}\langle\varphi_n|P^2|\varphi_n\rangle.$$

问题 2 角动量 J^2 和 J_z 的共同本征向量记作 $|j,m\rangle$,

$$J^2\,|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)\,|j,m\rangle\,,\quad J_z\,|j,m\rangle = \hbar m\,|j,m\rangle\,.$$

(a) 对于某个 $|j,m\rangle$, 计算

$$(\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 + (\Delta J_z)^2.$$

这里, $(\Delta J_x)^2 = \langle J_x^2\rangle - \langle J_x\rangle^2$ 等等.

(b) 当 m 等于多少时, 上式有最小值? 最小值是多少?

问题 3 考虑一维运动情形中的与空间位置有关的线性项.

(a) 设质量为 m 的粒子的一维运动的势能是 $V(x) = -fx$, 其中 f 是正的实常数. 这就像是重力场中的运动. Hamilton 量是

$$H = \frac{P^2}{2m} - fX. \tag{1}$$

求解 (1) 式的哈密顿量的本征态.

注 可以选择你认为合适的表象表示这个本征态. 另外, 我们并不要求解出能量的本征值. 实际上, 为了确定能量的本征值, 我们需要用到特殊函数 (Bessel 函数和 Airy 函数), 这里不需要对此进行分析.

(b) 一维谐振子有 Hamilton 量

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2.$$

定义升降算子

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X + i\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}P\right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X - i\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}P\right).$$

设想谐振子带有电荷 q, 并且将这样一个谐振子放在随时间变化的电场中. 电场的方向与 x 轴平行, 其大小记作 $\mathscr{E}(t)$. 为此我们需要在哈密顿量中添加另外的含时的势能项 $W(t) = -q\mathscr{E}(t)X$, 从而系统的 Hamilton 量变为

$$H(t) = H_0 + W(t) = H_0 - q\mathscr{E}(t)X. \tag{2}$$

相应的 (含时的) 薛定谔方程的解记作 $|\psi(t)\rangle$.

1. 用升降算子表示 (2) 式的 Hamilton 量 $H(t)$.
2. 定义函数

   $$\alpha(t) = \langle\psi(t)|a|\psi(t)\rangle.$$

   证明 $\alpha(t)$ 满足如下关系

   $$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -i\omega\alpha(t) + i\lambda(t),$$

   其中 $\lambda(t)$ 为

   $$\lambda(t) = \frac{q}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\mathscr{E}(t).$$

问题 4 某个无自旋的量子系统的 Hamilton 量为 H, 具有旋转对称性. 轨道角动量为 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{P}$, 这里 $\boldsymbol{R}=(X,Y,Z)$ 是空间位置算子, $\boldsymbol{P}=(P_x,P_y,P_z)$ 是动量算子. $\boldsymbol{L}$ 在 z 方向上的分量记作 L_z. 选择彼此对易的力学量集合为 (H,L^2,L_z), 其中 $L^2=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L}$. 这三个力学量的共同本征态记作 $|n,\ell,m\rangle$.

$$H\,|n,\ell,m\rangle = E_n\,|n,\ell,m\rangle\,,$$
$$L^2\,|n,\ell,m\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)\,|n,\ell,m\rangle\,,\quad L_z\,|n,\ell,m\rangle = \hbar m\,|n,\ell,m\rangle\,.$$

绕 z 轴的选择变换可以表示为

$$U(\phi)=e^{-i\phi L_z/\hbar},$$

其中 ϕ 是旋转的角度. 对于任意某个力学量 A, 我们用 $\tilde{A}$ 表示选择变换后的形式, 即

$$\tilde{A}=U(\phi)AU^\dagger(\phi)$$

(a) 令 $L_\pm=L_x\pm iL_y$. 计算 $\tilde{L}_+\,|n,\ell,m\rangle$, 并证明 $L_\pm$ 正比于 $\tilde{L}_\pm$, 即, 二者只是相差某个常数因子, 给出这个常数因子的具体形式.

(b) 计算对易子 $[X\pm iY,L_z]$ 和 $[Z,L_z]$. 证明 $(X\pm iY)\,|n,\ell,m\rangle$ 和 $Z\,|n,\ell,m\rangle$ 都是 L_z 的本征向量, 并计算相应的本征值.

(c) 某个力学量 A 的矩阵元可以表示为 $\langle n',\ell',m'|A|n,\ell,m\rangle$. 用 $X\pm iY$ 和 Z 的矩阵元表示 $\tilde{X}\pm i\tilde{Y}$ 和 $\tilde{Z}$ 的矩阵元.

问题 5 考虑一个具有角动量 $\boldsymbol{J}$ 的量子系统, 并且角动量量子数 $j=1$. 描述这个量子系统的 Hilbert 空间的基向量选择为 J_z 的本征向量, 记作 $|m\rangle$, $m=+1,0,-1$. 设系统的 Hamilton 量是

$$H_0=aJ_z+\frac{b}{\hbar}J_z^2,$$

其中 a 和 b 均为正的实常数.

(a) 求该系统的能级. 在什么条件下出现能级的简并?

(b) 引入匀强磁场 $\boldsymbol{B}$, 磁场的指向为 $\boldsymbol{n}$,

$$\boldsymbol{n}=(\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta).$$

在 $\boldsymbol{n}$ 方向上角动量的分量为 $J_n=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}$.
磁场的引入使得系统的 Hamilton 量多了一项 $W=\omega_0J_n$, 其中 $\omega_0=-\gamma|\boldsymbol{B}|$, 而 γ 是旋磁比, 设为负值, ω_0 则是在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的 Larmor 频率. 在 H_0 的本征向量上写出 W 的矩阵形式.

(c) 设 $b=a$, 且 $\omega_0\ll a$, 计算系统各个能级的一级修正 (即精确到 ω_0 的一次项), 以及系统的基态量子态的一级修正.

问题 6 考虑对自旋 $1/2$ 粒子的两个相继的测量过程. 系统 Q 的初态记作 ρ, 测量仪器 M 设为另一个自旋 $1/2$ 的粒子, 初态是 $\varphi = |x+\rangle\langle x+|$, 这里 $|x+\rangle$ 是 σ_x 的本征值为 $+1$ 的本征态.

(a) 在第一个阶段中, 系统和仪器随时间的演化由酉变换 $U_1(t)$ 决定,

$$U_1(t) = e^{igt\,\sigma_z \otimes \sigma_y},$$

这里直积的次序是系统 $\otimes$ 仪器, g 是常数, 表示系统和仪器之间的耦合强度. 在某个时刻 t, 对仪器进行投影测量, 测量算子是 $\Pi_0^M = |0\rangle\langle 0|$ 和 $\Pi_1^M = |1\rangle\langle 1|$, 其中 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 分别是 σ_z 的本征值为 $+1$ 和 -1 的本征态. 从对仪器的观测来说, 我们可以得到两个结果 $\sigma_z^M = +1$ 和 $\sigma_z^M = -1$ 出现的几率. 从系统的演化过程来说, 系统的量子态从初态 ρ 变化为另一个量子态 ρ'.

给出系统从 ρ 到 ρ' 的演化过程的操作算子 (即 Kraus 算子).

(b) 在相继的第二个测量过程中, 我们要对处于 ρ' 的系统 Q 进行严格测量, 测量对象是 σ_x. 为此, 我们应该再引入另一个测量仪器, 再建立系统和这个测量仪器之间的相互作用, 然后选择恰当的时刻对仪器进行观测, 如此等等. 不过, 为了叙述简便, 我们只是简单地说, 用投影算子 $\Pi_+^Q = |x+\rangle\langle x+|$ 和 $\Pi_-^Q = |x-\rangle\langle x-|$ 作用于 ρ'. 如果对测量结果不作选择, 那么就得到测量后的量子态 ρ''.

写出系统从初态 ρ 到末态 ρ'' 的演化过程的操作算子.