中 国 科 学 技 术 大 学

2013 年秋季学期考试试卷

考试科目: 量子力学　　　　得分: ________

学生所在系: ________　姓名: ________　学号: ________

注意: 本试卷共六题, 任选其中五题, 每题均为20分.

1. 质量为 m 的粒子被限制在宽度为 a 的一维无限深势阱中. 开始的时候粒子处于状态 $|\psi(0)\rangle$, 在位置空间中用波函数表示为 $\psi(x,0) = A\big[\psi_1(x) + 2i\,\psi_2(x)\big]$, 其中 A 是归一化常数, $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 分别为基态和第一激发态的波函数. 求粒子以后回到初始时刻的位置几率分布的最早时间.

2. 一维运动的 Hamilton 量为 $H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$. 将 H 的本征态记作 $|\varphi_n\rangle$, 即 $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$.

   (a) 证明如下关系:

   $$\langle\varphi_n|P|\varphi_{n'}\rangle = \alpha\langle\varphi_n|X|\varphi_{n'}\rangle,$$

   其中 α 是某个依赖于能级差 $E_{n'} - E_n$ 的数. 求出 α.

   (b) 进一步证明如下结果:

   $$\sum_{n'}(E_n - E_{n'})^2\big|\langle\varphi_n|X|\varphi_{n'}\rangle\big|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2}\big|\langle\varphi_n|P^2|\varphi_n\rangle\big|.$$

3. 角动量 J^2 和 J_z 的共同本征向量记作 $|j,m\rangle$.

   (a) 对于某个 $|j,m\rangle$, 计算

   $$\Delta(J_x^2) + \Delta(J_y^2) + \Delta(J_z^2).$$

   这里, $\Delta(J_x^2) = \langle J_x^2\rangle - \langle J_x\rangle^2$ 等等.

   (b) 当 m 等于多少时, 上式有最小值? 最小值是多少?

4. 设两个自旋为 1/2 的粒子组成的系统的 Hamilton 量为

$$H = A(S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) + B\boldsymbol{S}^{(1)}\cdot\boldsymbol{S}^{(2)},$$

其中 A, B 为常数, $\boldsymbol{S}$ 表示粒子的自旋角动量, S_z 是 z 方向上的分量. 上标表示第一个和第二个粒子. 求出这个两体系统的所有能级.

5. 一个两能级系统初态设为 $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, 其中 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 是 σ_z 的本征态, 相应的本征值分别为 $+1$ 和 -1. 如果对这个系统进行测量, 被测力学量为 σ_z, 而且对测量结果不作任何选择, 那么测量后的状态是 $\rho = |a|^2|0\rangle\langle 0| + |b|^2|1\rangle\langle 1|$, 这是一个混和态. 测量后的态 ρ 可以写为 $\rho = \Pi_0|\psi\rangle\langle\psi|\Pi_0^\dagger + \Pi_1|\psi\rangle\langle\psi|\Pi_1^\dagger$, 其中 $\Pi_0 = |0\rangle\langle 0|$ 和 $\Pi_1 = |1\rangle\langle 1|$ 是投影算子.
现在, 设想系统经历的如下形式的变化过程

$$|\psi\rangle\langle\psi| \longrightarrow \rho(t) = K_1|\psi\rangle\langle\psi|K_1^\dagger + K_2|\psi\rangle\langle\psi|K_2^\dagger,$$

其中 $K_1 = \mathrm{diag}(\gamma, 1)$, $K_2 = \mathrm{diag}(\sqrt{1-\gamma^2}, 0)$ 均为对角矩阵, 且 $\gamma = e^{-\Gamma t}$, $\Gamma > 0$. 显然, 当 $t \to \infty$ 时, 上述过程相当于对结果不作选择的理想测量过程.
问题是: 用几何图像描述 $\rho(t)$ 的变化, 即 $\rho(t)$ 的 Bloch 向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 如何随时间变化?

6. 在这个问题中, 我们要建立自旋为 1 的粒子的量子态的几何图像.
自旋 1 的粒子的三个自旋角动量可以表示为 (这里令 $\hbar = 1$),

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \ S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在某个方向 $\boldsymbol{u}$ 上的分量写作 $S_u = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u} = u_x S_x + u_y S_y + u_z S_z$. $\boldsymbol{u}$ 是三维实空间 ($\mathbb{R}^3$) 中的单位向量. 现在, 选择如下形式的 $\mathbb{R}^3$ 的基向量

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{l} &= (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta) \\
\boldsymbol{m} &= (-\cos\theta\cos\varphi,\ -\cos\theta\sin\varphi,\ \sin\theta) \\
\boldsymbol{n} &= (\sin\varphi,\ -\cos\varphi,\ 0)
\end{aligned}$$

(a) 给出 $S_\ell = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\ell}$ 的形式, 并计算 S_ℓ 的本征值和本征向量.
(b) 用 $\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 表示 S_ℓ 的本征向量.
关注本征值 0 对应的本征向量, 可以看到形象的几何描述.