中 国 科 学 技 术 大 学

2012 年秋季学期考试试卷

考试科目: 量子力学　　　　　　得分: ________

学生所在系: ________　姓名: ________　学号: ________

注意: 本试卷共六题, 任选其中五题, 每题均为20分.

1. 质量为 m 的粒子被限制在宽度为 a 的一维无限深势阱中. 开始的时候粒子处于状态 $|\psi(0)\rangle$, 在位置空间中用波函数表示为 $\psi(x,0) = A\big[\psi_1(x) + 2i\,\psi_2(x)\big]$, 其中 A 是归一化常数, $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 分别为基态和第一激发态的波函数. 求粒子以后回到初始时刻的位置几率分布的最早时间. 注: 是回到初始的位置几率分布, 而不是回到初态.

2. 一维运动的 Hamilton 量为 $H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$. 将 H 的本征态记作 $|\varphi_n\rangle$, 即 $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$.
   1. 证明如下关系:
   $$\langle\varphi_n|P|\varphi_{n'}\rangle = \alpha\langle\varphi_n|X|\varphi_{n'}\rangle,$$
   其中 α 是某个依赖于能级差 $E_{n'} - E_n$ 的数. 求出 α.
   2. 进一步证明如下结果:
   $$\sum_{n'}(E_n - E_{n'})^2\big|\langle\varphi_n|X|\varphi_{n'}\rangle\big|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2}\big|\langle\varphi_n|P^2|\varphi_n\rangle\big|.$$

3. 设两个自旋为 1/2 的粒子组成的系统的 Hamilton 量为
$$H = A(S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) + B\boldsymbol{S}^{(1)}\cdot\boldsymbol{S}^{(2)},$$
其中 A, B 为常数, $\boldsymbol{S}$ 表示粒子的自旋角动量, S_z 是 z 方向上的分量. 上标表示第一个和第二个粒子. 求出这个两体系统的所有能级.

4. 某个量子体系的态可以在有限维的 Hilbert 空间中描述. 考虑该体系的某一个力学量 H (不妨认为 H 就是体系的 Hamilton 量). H 的本征态记作 $|m\rangle$, 于是 $\{|m\rangle\}$ 形成一组正交归一的离散的基向量. 设某个算子可以表示为,
$$B(m,n) = |m\rangle\langle n|.$$
   1. 计算 $B(m,n)$ 的厄密共轭 $B^\dagger(m,n)$.
   2. 计算对易子 $[H, B(m,n)]$.
   3. 证明如下关系
   $$B(m,n)B^\dagger(p,q) = \delta_{n,q}B(m,p).$$

4. 计算 $\mathrm{Tr}[B(m,n)]$, 即算子 $B(m,n)$ 的迹.
5. 设 A 是另一个算子, 其矩阵元为 $A_{mn}=\langle m|A|n\rangle$, 证明

$$A=\sum_{m,n}A_{m,n}B(m,n).$$

6. 证明 $A_{pq}=\mathrm{Tr}[A\,B^{\dagger}(p,q)]$.

5. 一个两能级系统初态设为 $|\psi\rangle=a|0\rangle+b|1\rangle$, 其中 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 是 σ_z 的本征态, 相应的本征值分别为 $+1$ 和 -1. 如果对这个系统进行测量, 被测力学量为 σ_z, 而且对测量结果不作任何选择, 那么测量后的状态是 $\rho=|a|^2|0\rangle\langle 0|+|b|^2|1\rangle\langle 1|$, 这是一个混和态. 测量后的态 ρ 可以写为 $\rho=\Pi_0|\psi\rangle\langle\psi|\Pi_0^{\dagger}+\Pi_1|\psi\rangle\langle\psi|\Pi_1^{\dagger}$, 其中 $\Pi_0=|0\rangle\langle 0|$ 和 $\Pi=|1\rangle\langle 1|$ 是投影算子.
现在, 设想系统经历的如下形式的变化过程

$$|\psi\rangle\langle\psi|\longrightarrow\rho(t)=K_1|\psi\rangle\langle\psi|K_1^{\dagger}+K_2|\psi\rangle\langle\psi|K_2^{\dagger},$$

其中 $K_1=\mathrm{diag}(\gamma,1)$, $K_2=\mathrm{diag}(\sqrt{1-\gamma^2},0)$ 均为对角矩阵, 且 $\gamma=e^{-\Gamma t}$, $\Gamma>0$. 显然, 当 $t\to\infty$ 时, 上述过程相当于对结果不作选择的理想测量过程.
问题是: 用几何图像描述 $\rho(t)$ 的变化, 即 $\rho(t)$ 的 Bloch 向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 如何随时间变化?

6. 在这个问题中, 我们要建立自旋为 1 的粒子的量子态的几何图像.
自旋 1 的粒子的三个自旋角动量可以表示为 (这里令 $\hbar=1$),

$$S_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\ S_y=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},\ S_z=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

在某个方向 $\boldsymbol{u}$ 上的分量写作 $S_u=\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}=u_xS_x+u_yS_y+u_zS_z$. $\boldsymbol{u}$ 是三维实空间 ($\mathbb{R}^3$) 中的单位向量. 现在, 选择如下形式的 $\mathbb{R}^3$ 的基向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{l}&=(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)\\ \boldsymbol{m}&=(-\cos\theta\cos\varphi,\ -\cos\theta\sin\varphi,\ \sin\theta)\\ \boldsymbol{n}&=(\sin\varphi,\ -\cos\varphi,\ 0)\end{aligned}$$

这和我们常用的形式有些不同, 但无关紧要.

1. 给出 $S_\ell=\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\ell}$ 的形式.
2. 计算 S_ℓ 的本征值和本征向量.
3. 用 $\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 表示 S_ℓ 的本征向量.
   关注本征值 0 对应的本征向量, 可以看到形象的几何描述.